Полуэмпирические модели турбулентности

Уравнения Навье - Стокса

$$\mathrm{Re} = \frac{u_0 \cdot D}{\nu}$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0;$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i \cdot u_j}{\partial x_j} = \frac{1}{\mathrm{Re}} \cdot \Delta u_i - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i};$$

Уравнение конвекции-диффузии

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + u_i \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\eta \frac{\partial \theta}{\partial x_i}\right);$$

Неизвестные функции: $\rho(\vec{r},t), u_1(\vec{r},t), u_2(\vec{r},t), u_3(\vec{r},t), p(\vec{r},t)$

Уравнение на давление

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial p}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\nu \cdot \Delta u_i - u_j \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right);$$

Уравнение Пуассона

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\lambda \frac{\partial p}{\partial x_i}\right) = f;$$

Осреднение уравнений Навье - Стокса

$$u_i = \overline{u}_i + u'_i; \quad \overline{u}_i = \frac{1}{T}\int_{t-T/2}^{t+T/2} u_i dt; \qquad \frac{1}{T}\int_{t-T/2}^{t+T/2} u'_i dt = 0;$$

$$\frac{1}{T}\int_{t-T/2}^{t+T/2}\left\{\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right\}dt = 0; \qquad \frac{1}{T}\int_{t-T/2}^{t+T/2}\left\{\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i \cdot u_j}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{1}{\mathrm{Re}}\cdot\Delta u_i\right\}dt = 0;$$

$$\frac{1}{T}\int_{t-T/2}^{t+T/2}\left\{\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right\}dt = \frac{\partial}{\partial x_i}\cdot\frac{1}{T}\int_{t-T/2}^{t+T/2} u_i dt = \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_i} = 0;$$

$$\frac{1}{T}\int_{t-T/2}^{t+T/2}\left\{\frac{\partial\left(\overline{u}_i + u'_i\right)_i}{\partial t} + \frac{\partial\left(\overline{u}_i + u'_i\right)\cdot\left(\overline{u}_j + u'_j\right)}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial\left(p + p'\right)}{\partial x_i} - \frac{1}{\mathrm{Re}}\cdot\Delta\left(\overline{u}_i + u'_i\right)\right\}dt = 0;$$

Уравнения Рейнольдса (RANS)

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0;$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i \cdot u_j}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{1}{\mathrm{Re}} \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \overline{u_i' \cdot u_j'}\right);$$

Отличаются от Навье-Стокса только слагаемым $$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{u_i' \cdot u_j'}\right) \equiv \frac{\partial \tau_{i,j}}{\partial x_j}$$

$\tau_{i,j} = \tau_{j,i}$ **тензор турбулентных напряжений**

Предположения при «выводе» уравнений Рейнольдса

$$\overline{f+g} = \overline{f} + \overline{g}$$

$$\overline{af} = a\overline{f}$$

$$\overline{a} = a$$

$$\overline{\frac{\partial f}{\partial s}} = \frac{\partial \overline{f}}{\partial s}$$

$$\overline{\overline{f}g} = \overline{f}\,\overline{g}$$

$$\overline{\overline{f}} = \overline{f}$$

$$\overline{f'} = 0$$

$$\overline{\overline{f}\,\overline{g}} = \overline{f}\,\overline{g}$$

$$\overline{\overline{f}h'} = 0$$

$$\overline{fg} = \overline{f\;g} + \overline{f'g'}$$

Гипотеза Буссинеска

$$-\overline{u'_i u'_j} = \nu_T \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} k \delta_{ij} = 2\nu_T S_{ij} - \frac{2}{3} k \delta_{ij}$$

возвращает нас к уравнениям Навье-Стокса

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u_i \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x_i} = 0; \qquad \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0; \qquad \nu_T = F(\varepsilon, k)$$

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i \cdot u_j}{\partial x_j} = \nu_T \cdot \rho \cdot \Delta u_i - \frac{\partial p}{\partial x_i};$$

Полуэмпирические модели турбулентности

- Модели, использующие гипотезу Буссинеска (линейные модели, EVM). Обычно классифицируются по количеству дифференциальных уравнений переноса
  - Алгебраические модели
  - Модели с одним уравнением
    - ✓ модель Спаларта-Аллмареса SA
    - ✓ модель Секундова ν_t-92
  - Модели с двумя уравнениями
    - ✓ Модели типа k-ε
    - ✓ Модели типа k-ω
      - Модель Ментера SST
  - …..

- Модели рейнольдсовых напряжений (нелинейные модели)
  - Дифференциальные модели рейнольдсовых напряжений (DRSM)
  - Алгебраические модели рейнольдсовых напряжений (ARSM)
  - Явные алгебраические модели рейнольдсовых напряжений (EARSM)
    - ✓ Нелинейные модели (NLM)

Модели с двумя уравнениями для кинетической энергии турбулентности k и диссипации ε

Уравнение переноса кинетической энергии турбулентности

- Уравнение для кинетической энергии турбулентности $k = \dfrac{\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2}}{2}$ получается путем свертки уравнений для рейнольдсовых напряжений
- В случае несжимаемой жидкости

$$\frac{\partial k}{\partial t} + U_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = P_k + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\nu \frac{\partial k}{\partial x_j} + D_j \right) - \varepsilon$$

  - Турбулентная диффузия $D_j = -\overline{u'_j \left(\dfrac{u'_i u'_i}{2} + \dfrac{p'}{\rho} \right)}$
    - ✓ Молекулярный и турбулентный диффузионный перенос
  - Генерация $P_k = -\overline{u'_i u'_j} \dfrac{\partial U_i}{\partial x_j}$
    - ✓ Получение энергии от осредненного течения
  - Диссипация $\varepsilon = -2\nu \overline{\dfrac{\partial u'_i}{\partial x_j} \dfrac{\partial u'_i}{\partial x_j}}$
    - ✓ Передача энергии в тепло за счет вязких сил
- В этом уравнении также много неизвестных: турбулентная диффузия, диссипация и замыкающие соотношения для напряжений Рейнольдса

Уравнение переноса изотропной диссипации ε

- Это уравнение можно вывести из уравнений Навье-Стокса при помощи процедуры осреднения по Рейнольдсу
  - Продифференцировать уравнение Навье-Стокса по координате
  - Свернуть с производной пульсации скорости
  - Осреднить по Рейнольдсу

$$\overline{2\nu \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} [NS]} \Rightarrow \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \overline{u}_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = P_\varepsilon + \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j}\left(\nu \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} + D_{\varepsilon,j} \right) - \varepsilon_\varepsilon$$

- Полученное уравнение содержит много слагаемых, которые необходимо моделировать
  - Генерация $$P_\varepsilon = -2\nu \left[\overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_k} \frac{\partial u_j'}{\partial x_k}} + \overline{\frac{\partial u_k'}{\partial x_i} \frac{\partial u_k'}{\partial x_j}} \right] \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} - 2\nu \cdot \overline{u_k' \frac{\partial u_i'}{\partial x_j}} \frac{\partial^2 \overline{u}_i}{\partial x_k \partial x_j} - 2\nu \overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_k} \frac{\partial u_i'}{\partial x_m} \frac{\partial u_k'}{\partial x_m}}$$
  - Диссипация $$\varepsilon_\varepsilon = -2\nu^2 \overline{\frac{\partial^2 u_i'}{\partial x_k \partial x_m} \frac{\partial^2 u_i'}{\partial x_k \partial x_m}}$$
  - Турбулентная диффузия $$D_{\varepsilon,j} = -\nu \cdot \overline{u_j' \frac{\partial u_i'}{\partial x_k} \frac{\partial u_i'}{\partial x_k}} - \frac{2\nu}{\rho} \overline{\frac{\partial p'}{\partial x_k} \frac{\partial u_j'}{\partial x_k}}$$

- Обычно предполагают, что генерация, диссипация и коэффициент диффузии для ε пропорциональны аналогичным величинам для k

«Стандартная» k-ε модель

- Высокорейнольдсовая модель (Spalding, Launder, 1972)
  - Не учитывает влияния стенок

$$\frac{Dk}{Dt} = \nabla \bullet \left(\left(\nu + \frac{\nu_T}{\sigma_k} \right) \nabla k \right) + P_k - \varepsilon$$

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = \nabla \bullet \left(\left(\nu + \frac{\nu_T}{\sigma_\varepsilon} \right) \nabla \varepsilon \right) + C_1 \frac{\varepsilon}{k} P_k - C_2 \frac{\varepsilon^2}{k}$$

$$P_k = \nu_T S^2 = -\tau_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \qquad \nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}$$

  - Иногда «стандартной» моделью называют низкорейнольдсовые версии Jones, Launder (1973) и Launder, Sharma (1974)

- Константы модели

$$\sigma_k = 1.0, \sigma_\varepsilon = 1.3, C_1 = 1.44, C_2 = 1.92, C_\mu = 0.09$$

  - Вырождение однородной изотропной турбулентности $k \sim t^{-\frac{1}{C_2 - 1}}$
  - Турбулентность в поле однородного сдвига
  - Закономерности на логарифимическом участке пограничного слоя

$$C_2 = C_1 - \frac{\kappa^2}{\sigma_\varepsilon \sqrt{C_\mu}}$$

- Модификации
  - RNG модель
  - Kato, Launder, 1993 $P_k = \nu_T S \Omega$

Несовершенство моделей турбулентности

- В отличие от уравнений движения модели турбулентности не являются универсальными физическими законами

- Большинство моделей турбулентности базируются на закономерностях, характерных для простых «канонических» течений
    - ✓ Закон стенки
    - ✓ Формула Колмогорова
    - ✓ …
  - ➢ Как только эти закономерности перестают выполняться – точность расчета падает

- Константы в моделях турбулентности «настраиваются» на определенный набор течений
  - ➢ Часто приходится при настройке идти на компромисс

- Не существует универсальных моделей турбулентности, каждая модель имеет свою «область применимости»

Вычислительные ресурсы и перспективы практического применения различных методов моделирования турбулентных течений (P. Spalart, 2000)

Метод	Необходимое число узлов сетки	Необходимое число шагов по времени	Готовность
2D Steady RANS	10^{5}	$10^{3.5}$	1980
3D Steady RANS	10^{7}	10^{3}	1985
3D Unsteady RANS	10^{7}	$10^{3.5}$	1995
DES (гибридный метод)	10^{8}	10^{4}	2000
LES	$10^{11.5}$	$10^{6.7}$	2045
DNS	10^{16}	$10^{7.7}$	2080